

Задача 1. Расчет многопролетной шарнирной балки

Дано: $l_1=8,4\text{м}$, $F_1=60\text{кН}$, схема 1, $q_1=20\text{кН/м}$, сечения 2,12, $l_2=6,4\text{м}$, $F_2=24\text{кН}$, $q_2=15\text{кН/м}$, $l_3=10,2\text{м}$, $a=1,2\text{м}$, $b=2,1\text{м}$, $M=22\text{кНм}$.

Расчет статически определимой балки(многопролетной шарнирно-разрезной балки).

1. Вычерчиваем балку в масштабе. Прикладываем заданную внешнюю нагрузку. Рассчитать заданную балку, изображенную на рисунке 1.1, на подвижную и неподвижную нагрузки.

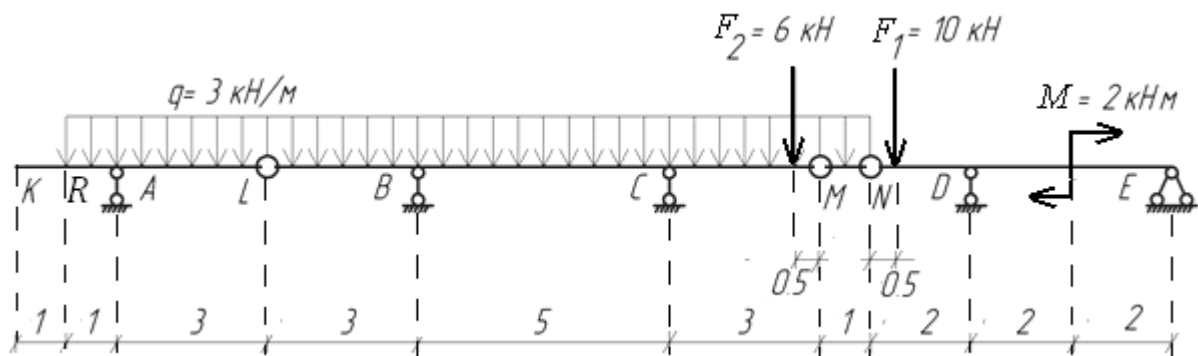


Рисунок 1.1

2. Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости и статической определимости балки по формуле 1.1.

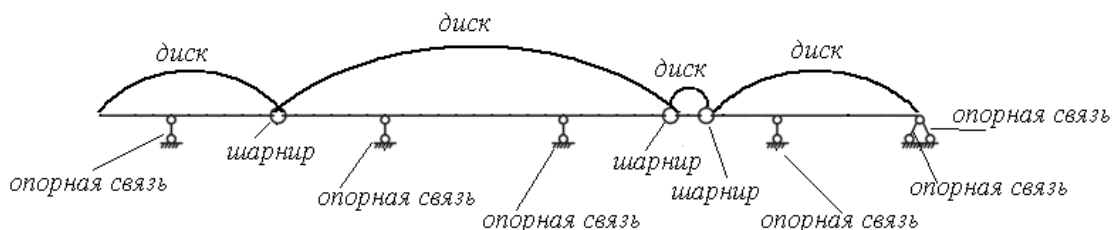


Рисунок 1.2

В заданной системе 4 диска, 3 шарнира и 6 опорных связей (рисунок 1.2).

Отсюда следует, что степень свободы системы равна:

$$W = 3D - 2Ш - C_{on} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - (1+1+1+1+2) = 0$$

Необходимое условие выполнено. Аналитическое условие $W=0$ является необходимым условием геометрической неизменяемости и показывает, что система является статически определимой.

Составим «поэтажную» схему взаимодействия элементов балки, для проверки достаточного условия геометрической неизменяемости системы (рисунок 1.3). Из схемы видно, что шарниры расположены правильно, следовательно, каждый этаж балки в этой схеме представляет собой статически определимую и геометрически неизменяемую систему. Таким образом, выполнено и достаточное условие геометрической неизменяемости.

Вывод: Так как выполнено и необходимое, и достаточное условия геометрической неизменяемости, то заданная система является геометрически неизменяемой системой. Система статически определима.

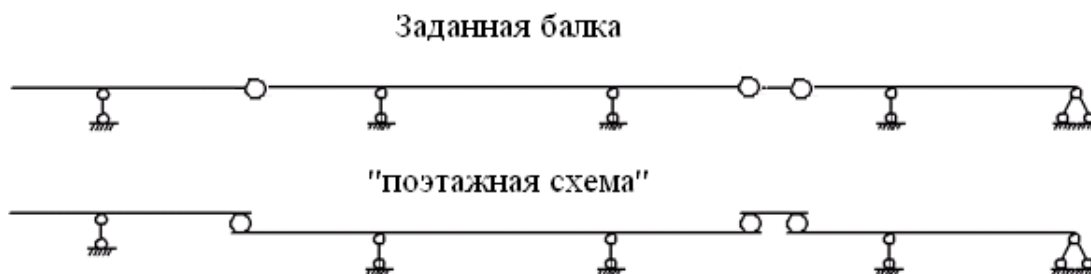


Рисунок 1.3

3. Расчет многопролетной балки производим с помощью поэтажной схемы, начиная с самых верхних этажей, постепенно переходя на нижние этажи, учитывая при этом давление верхних этажей.

Расчет начинаем с балок **KL** и **MN** (верхние этажи).

Расчет балки KL (рисунок 1.4 а).

а) Определение опорных реакций.

$$\sum M_L = 0; -q \cdot \frac{4^2}{2} + V_A \cdot 3 = 0,$$

$$V_A = \frac{(q \cdot 4^2 / 2)}{3} = \frac{(3 \cdot 4^2 / 2)}{3} = 8 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0; -q \cdot \frac{1^2}{2} + q \cdot \frac{3^2}{2} - V_L \cdot 3 = 0,$$

$$V_L = \frac{(q \cdot 3^2 / 2) - (q \cdot 1^2 / 2)}{3} = \frac{(3 \cdot 3^2 / 2) - (3 \cdot 1^2 / 2)}{3} = 4 \text{ кН}.$$

б) Определение поперечных сил в характерных точках.

$$Q_K=0,$$

$$Q_R=0,$$

$$Q_A^{лев} = -q \cdot 1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ кН},$$

$$Q_A^{np} = Q_A^{лев} + V_A = -3 + 8 = 5 \text{ кН}$$

$$Q_C = Q_A^{np} - q \cdot 3 = 5 - 9 = -4 \text{ кН}$$

Из уравнения определим точку, в которой поперечная сила равна нулю:

$$Q_A^{np} - q \cdot x = 0$$

Откуда
$$x = \frac{Q_A^{np}}{q} = \frac{5}{3} = 1,667 \text{ м}$$

По полученным данным строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 1.4 б).

в) Определяем изгибающие моменты в характерных точках.

$$M_K=0,$$

$$M_R=0,$$

$$M_C=0,$$

$$M_A = -q \cdot \frac{1^2}{2} = -1,5 \text{ кНм}.$$

В сечении, где Q = 0 на эпюре моментов будет экстремум (x = 1,667 м):

$$M_{экс} = V_A \cdot 1,667 - q \cdot \frac{1,667^2}{2} = 8 \cdot 1,667 - 3 \cdot \frac{1,667^2}{2} = 2,667 \text{ кНм}.$$

По полученным данным строим эпюру моментов M (рисунок 1.4 в).

Расчет балки MN (рисунок 1.4 г)

а) Определение опорных реакций.

$$\sum M_M = 0; q \cdot \frac{1^2}{2} - V_N \cdot 1 = 0$$

$$V_N = \frac{(q \cdot 1^2/2)}{1} = \frac{(3 \cdot 1^2/2)}{1} = 1,5 \text{ кН}$$

$$\sum M_N = 0; -q \cdot \frac{1^2}{2} + V_M \cdot 1 = 0$$

$$V_M = \frac{(q \cdot 1^2/2)}{1} = \frac{(3 \cdot 1^2/2)}{1} = 1,5 \text{ кН}$$

б) Определение поперечных сил в характерных точках.

$$Q_M = V_M = 1,5 \text{ кН}$$

$$Q_N = V_M - q \cdot 3 = 1,5 - 3 = -1,5 \text{ кН}$$

Поперечная сила равна нулю на середине участка.

По полученным данным строим эпюру Q (рисунок 1.4 д).

в) Определение изгибающих моментов в характерных точках.

$$M_M = 0,$$

$$M_N = 0$$

Максимальный момент будет в точке, где поперечная сила равна нулю ($x = 0,5$ м):

$$M_{\text{экс}} = V_M \cdot 0,5 - q \cdot \frac{1^2}{2} = 1,5 \cdot 0,5 - 3 \cdot \frac{1^2}{2} = 0,375 \text{ кНм}$$

По полученным данным строим эпюру M (рисунок 1.4 е).

Рассчитываем балки нижележащих этажей с учетом опорных реакций, опирающихся на них балок.

Расчет балки LM (рисунок 1.4 ж).

К рассматриваемой балке, помимо заданной нагрузки q и F_2 , в точке L прикладывается сила V'_L и в точке M прикладывается сила V'_M .

V'_L представляет давление верхнего этажа KL на нижележащий этаж LM, равное по величине опорной реакции V_L вышележащей балки KL в точке опирания L и противоположное по направлению этой реакции.

V'_M представляет давление верхнего этажа MN на нижележащий этаж LM, равное по величине опорной реакции V_M вышележащей балки MN в точке опирания M и противоположное по направлению этой реакции.

а) Определение опорных реакций.

$$\sum M_C = 0; -V'_L \cdot 8 + V_B \cdot 5 + V'_M \cdot 3 + F_2 \cdot 2,5 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - q \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

$$V_B = \frac{V'_L \cdot 8 - V'_M \cdot 3 - F_2 \cdot 2,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4}{5} = \frac{4 \cdot 8 - 1,5 \cdot 3 - 6 \cdot 2,5 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 8 \cdot 4}{5} = 19 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; -V'_L \cdot 3 - V_C \cdot 5 + V'_M \cdot 8 + F_2 \cdot 7,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

$$V_C = \frac{-V'_L \cdot 3 + V'_M \cdot 8 + F_2 \cdot 7,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 8 \cdot 4}{5} = \frac{-4 \cdot 3 + 1,5 \cdot 8 + 6 \cdot 7,5 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 + 3 \cdot 8 \cdot 4}{5} = 25,5 \text{ кН}$$

б) Определение поперечных сил в характерных точках балки.

$$Q_L = -4 \text{ кН}$$

$$Q_B^{\text{ле}} = -4 - q \cdot 3 = -4 - 9 = -13 \text{ кН}$$

$$Q_B^{\text{пр}} = Q_B^{\text{ле}} + V_B = -13 + 19 = 6 \text{ кН}$$

$$Q_C^{ле6} = Q_B^{np} - q \cdot 5 = 6 - 3 \cdot 5 = -9 \text{ кН}$$

$$Q_C^{np} = Q_C^{ле6} + V_C = -9 + 22,5 = 16,5 \text{ кН};$$

$$Q_{F_2}^{ле6} = +16,5 - q \cdot 2,5 = 16,5 - 3 \cdot 2,5 = 9 \text{ кН}$$

$$Q_{F_2}^{np} = Q_{F_2}^{ле6} - F_2 = 9 - 6 = 3 \text{ кН}$$

$$Q_M = Q_{F_2}^{np} - q \cdot 0,5 = 3 - 3 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН}$$

Из уравнения определим точку, в которой поперечная сила равна нулю:

$$Q_B^{np} - q \cdot x = 0,$$

откуда
$$x = \frac{Q_B^{np}}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ м}$$

По полученным данным строим эпюру Q (рисунок 1.4 з).

в) Определение изгибающих моментов в характерных точках.

$$M_L = 0$$

$$M_B = -V'_L \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = -25,5 \text{ кНм}$$

$$M_C = -V'_M \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 2,5 = -1,5 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2,5 = -33 \text{ кНм}$$

$$M_{F_2} = -V'_M \cdot 0,5 - q \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -1,5 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -1,125 \text{ кНм}$$

$$M_M = 0$$

Максимальный момент будет в точке, где поперечная сила равна нулю ($x = 2 \text{ м}$):

$$M_{экс} = -V'_L \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + V_B \cdot 2 = -4 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + 19 \cdot 2 = 20 - 37,5 + 38 = -19,5 \text{ кНм}$$

По полученным данным строим эпюру M (рисунок 1.4 и).

Расчет балки NE (рисунок 1.4 к).

К рассматриваемой балке, помимо заданной нагрузки M и F_1 , в точке N прикладывается сила V'_N . V'_N представляет давление верхнего этажа MN на нижележащий этаж NE, равное по величине опорной реакции V_N вышележащей балки MN в точке опирания N и противоположное по направлению этой реакции.

а) Определение опорных реакций.

$$\sum M_D = 0; -V'_N \cdot 2 + V_E \cdot 4 - F_1 \cdot 1,5 + M = 0$$

$$V_E = \frac{V'_N \cdot 2 + F_1 \cdot 1,5 - M}{4} = \frac{1,5 \cdot 2 + 10 \cdot 1,5 - 2}{4} = 4,0 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; -V'_N \cdot 6 + V_D \cdot 4 - F_1 \cdot 5,5 + M = 0$$

$$V_D = \frac{V'_N \cdot 6 + F_1 \cdot 5,5 - M}{4} = \frac{1,5 \cdot 6 + 10 \cdot 5,5 - 2}{4} = 15,5 \text{ кН}$$

б) Определение поперечных сил в характерных точках балки.

$$Q_N = -1,5 \text{ кН}$$

$$Q_{F_1}^{лег} = Q_N = -1,5 \text{ кН}$$

$$Q_{F_1}^{np} = Q_{F_1}^{лег} - F_1 = -1,5 - 10 = -11,5 \text{ кН}$$

$$Q_D^{лег} = Q_{F_1}^{np} = -11,5 \text{ кН}$$

$$Q_D^{лег} = Q_D^{лег} + V_D = -11,5 + 15,5 = 4,0 \text{ кН}$$

$$Q_E = 4 \text{ кН}$$

По полученным данным строим эпюру Q (рисунок 1.4 л).

в) Определение изгибающих моментов в характерных точках.

$$M_N = 0$$

$$M_{F_1} = -V'_N \cdot 0,5 = -1,5 \cdot 0,5 = -0,75 \text{ кНм}$$

$$M_D = -V'_N \cdot 2 - F_1 \cdot 1,5 = -1,5 \cdot 2 - 10 \cdot 1,5 = -18 \text{ кНм}$$

$$M_M^{лег} = -V'_N \cdot 4 - F_1 \cdot 3,5 + V_D \cdot 2 = -1,5 \cdot 4 - 10 \cdot 3,5 + 15,5 \cdot 2 = -10 \text{ кНм}$$

$$M_M^{np} = -V'_N \cdot 4 - F_1 \cdot 3,5 + V_D \cdot 2 + M = -1,5 \cdot 4 - 10 \cdot 3,5 + 15,5 \cdot 2 + 2 = -8 \text{ кНм}$$

$$M_E = 0$$

По полученным данным строим эпюру M (рисунок 1.4 м).

Для того чтобы получить эпюру поперечных сил Q для балки в целом, полученные участки поперечных сил со всех этажей собираем на одну линию (рисунок 1.5 а). Для того чтобы получить эпюру изгибающих моментов M для балки в целом, полученные участки изгибающих моментов со всех этажей собираем на одну линию (рисунок 1.5 б)

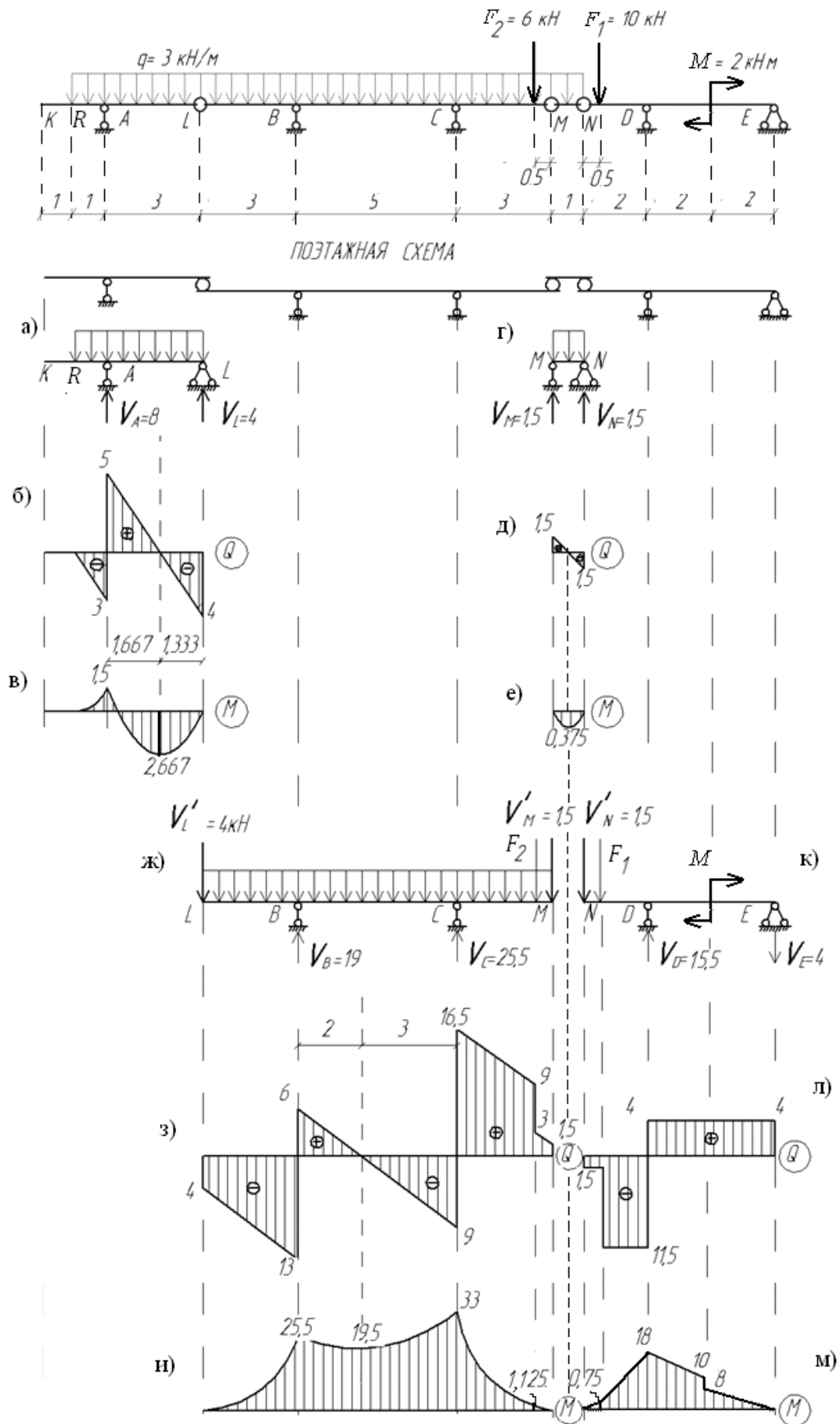


Рисунок 1.4

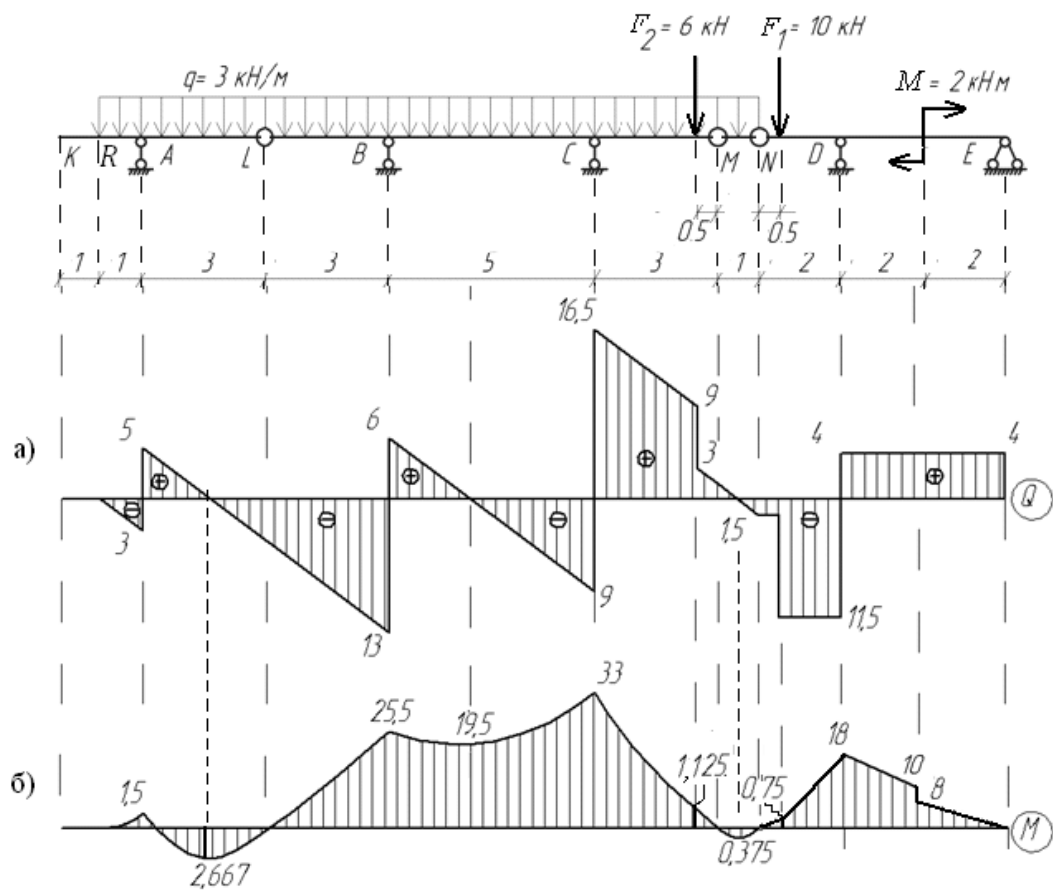


Рисунок 1.5

4. Построение линии влияния опорных реакций кинематическим способом:

а) Построение линии влияния V_A .

Для этого рассмотрим этаж (участок KL), где находится опора A (рисунок 1.6).

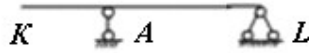


Рисунок 1.6

Сначала по алгоритму выполняется построение только на выбранном этаже:

- удалить вертикальную связь опоры A (рисунок 1.7);



Рисунок 1.7

- взамен удаленной связи приложить опорную реакцию V_A (вверх) (рисунок 1.8);



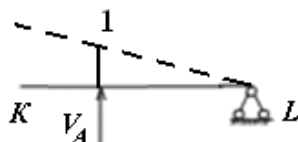
Рисунок 1.8

- сообщить возможное перемещение балки в направлении опорной реакции V_A (рисунок 1.9);



Рисунок 1.9

- выбрать масштаб, приняв ординату линии влияния над опорой A, равную единице (рисунок 1.10).



Далее показываем влияние перемещений балки KL на участок справа, но так как в точке L перемещения не будет, следовательно, не будет перемещаться и вся правая часть балки.

Полученное очертание и есть линия влияния опорной реакции V_A (рисунок 1.11а).

Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

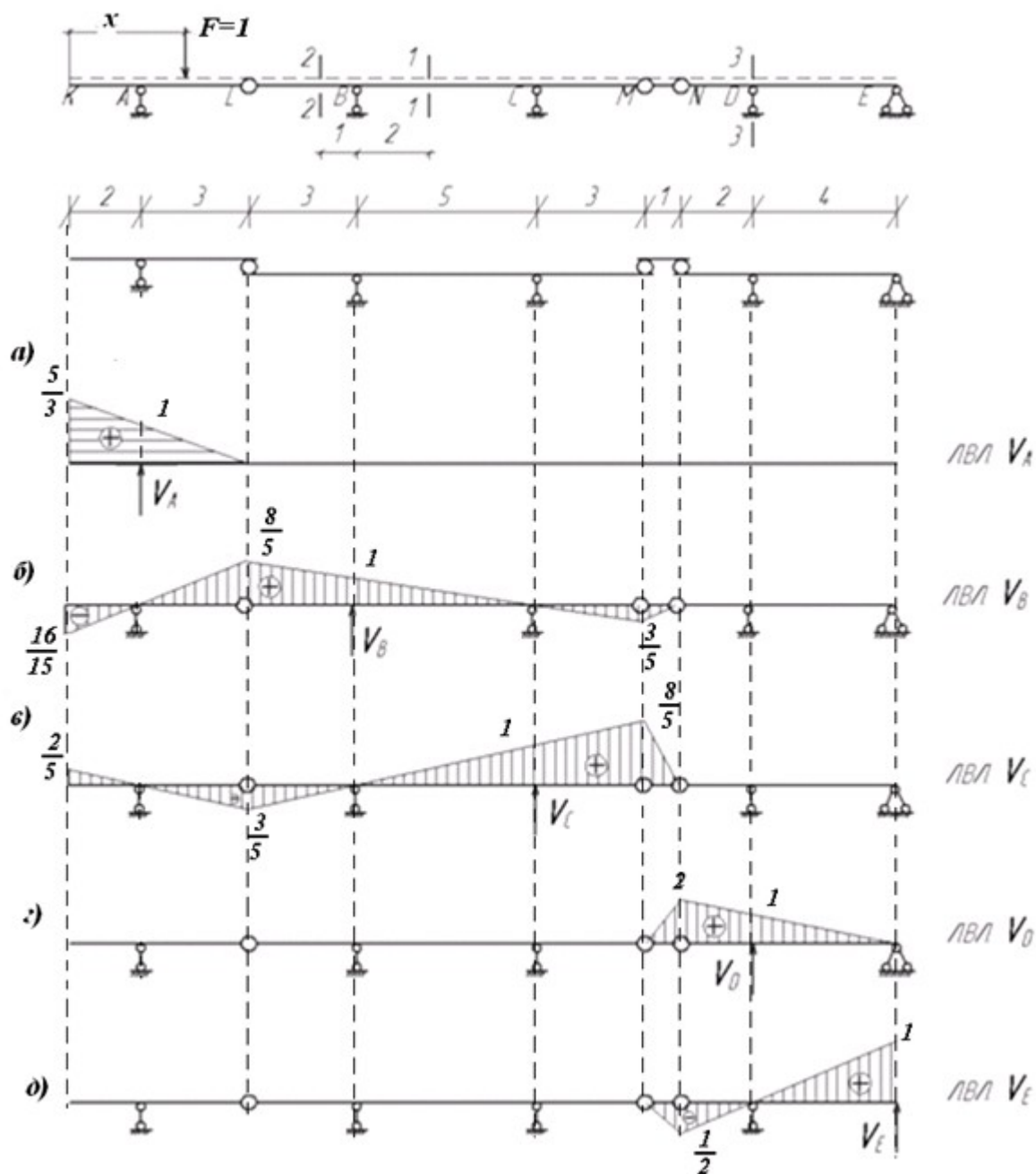


Рисунок 1.11

б) линии влияния опорных реакций V_B , V_C , V_D , V_E строятся аналогично (рисунок 1.11 б-д).

5. Построение линий влияния поперечной силы Q для заданных сечений.

а) построение линии влияния Q_1 .

Для этого рассмотрим этаж (участок LM), где находится сечение 1 (рисунок 1.12).

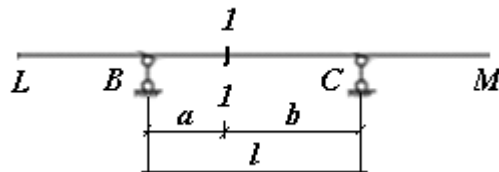


Рисунок 1.12

Сначала по алгоритму выполняется построение только на выбранном этаже:

- устранить связь по нормальному направлению к оси балки в сечении, т. е. разрезать её в сечении 1-1 (рисунок 1.13);

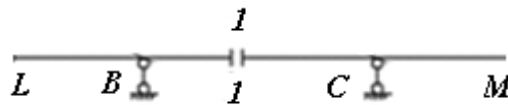


Рисунок 1.13

- взамен удалённой связи приложить поперечную силу Q_1 к левой и правой частям в положительном направлении (слева – вниз, справа – вверх) (рисунок 1.14);

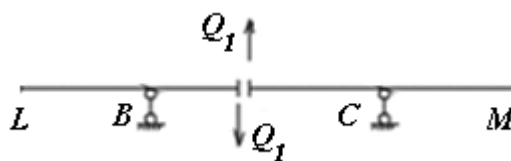


Рисунок 1.14

- сообщить возможные перемещения элементам балки в направлении приложенных сил, при этом части балки перемещаются параллельно друг другу (рисунок 1.15);

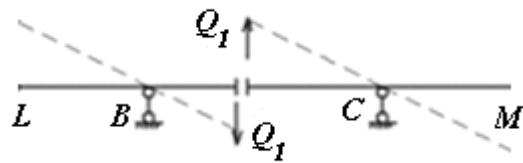


Рисунок 1.15

- на графике перемещений полный сдвиг оси балки в сечении 1-1 должен быть равен единице (рисунок 1.16);

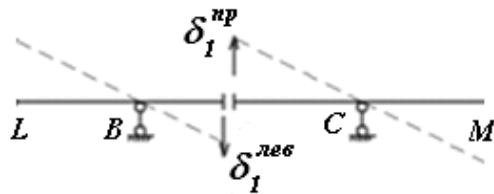


Рисунок 1.16

$$\delta_1^{лев} = \frac{a}{l} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\delta_1^{np} = \frac{b}{l} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\delta_1^{лев} + \delta_1^{np} = 0,4 + 0,6 = 1$$

- ординаты ломаной линии, отсчитываемые по вертикали от начального положения оси балки, образуют линию влияния Q_1 на участке.

Далее показываем влияние перемещения балки LM на участки справа и слева. Так как в точке L шарнир переместился вверх, то он потянет за собой участок KL, а в точке M шарнир опустился вниз, то он потянет за собой участок MN. Далее справа шарнир N не перемещается, следовательно, и остальная часть балки справа тоже не будет перемещаться (рисунок 1.17). Полученное очертание и есть линия влияния поперечной силы Q_1 (рисунок 1.24 а).

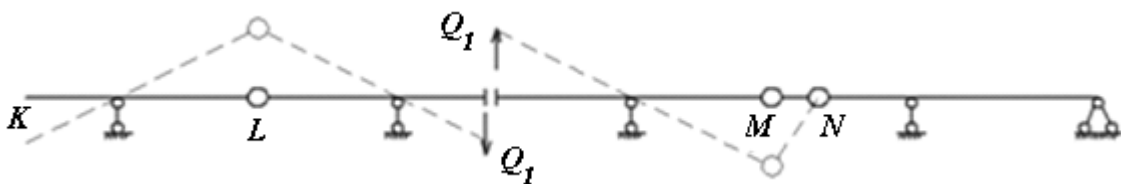


Рисунок 1.17

Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

б) построение линии влияния Q_2

Построение линии влияния Q_2 ведётся по тому же алгоритму, что и для построения линии влияния Q_1 . Обратите внимание на то, что сечение 2-2 находится не в пролёте элемента балки LM, а на её консольной части. Поэтому после приложения поперечных сил в сечение 2-2 правая часть балки остаётся неподвижной (рисунок 1.25 а), а левая опускается вниз на единицу. Далее показываем влияние перемещений балки LM на участки справа и слева. Полученная ломаная линия и есть линия влияния Q_2 (рисунок 1.25 б).

в) построение линии влияния Q_3

При построении линии влияния Q_3 нужно обратить внимание на положение сечения 3-3: оно находится над опорой D (рисунок 1.25). Поэтому необходимо строить две линии влияния $Q_3^{\text{лев}}$ и $Q_3^{\text{пр}}$. Для построения $Q_3^{\text{лев}}$, согласно приведённому выше алгоритму построения линии влияния, разрежем балку чуть левее опоры D и дадим возможные перемещения оси балки в направлении приложенных поперечных сил (рисунок 1.25 д). Пунктиром показана система после перемещения. Правая часть балки остаётся неподвижной, а левая опускается вниз на единицу. Далее показываем влияние балки NE на участки слева. Полученное очертание и есть линия влияния $Q_3^{\text{лев}}$ (рисунок 1.25 е).

Последовательность построения линии влияния $Q_3^{\text{пр}}$ приведена на рисунке 1.25 ж. Для построения $Q_3^{\text{пр}}$, согласно приведенному выше алгоритму построения линии влияния, разрежем балку чуть правее опоры D и дадим возможные перемещения оси балки в направлении приложенных поперечных сил (рисунок 1.25 ж). Полный сдвиг оси балки справа от опоры в сечении 3-3 равен единице. Левее опоры D балка перемещается параллельно правой части балки, поэтому ордината точки N находится из подобия соответствующих треугольников, расположенных по правую и левую стороны

от опоры D. Далее показываем влияние балки NE на участки слева. Полученное очертание и есть линия влияния Q_3^{np} (рисунок 1.25 з).

6. Построение линий влияния изгибающего момента M для заданных сечений.

а) построение линии влияния M_1

Для этого рассмотрим этаж (участок LM), где находится сечение 1 (рисунок 1.18).

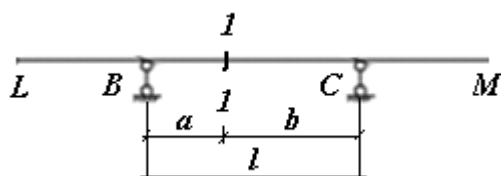


Рисунок 1.18

Сначала по алгоритму (см. таблицу 1) выполняется построение только на выбранном этаже:

- устранить связь, отвечающую изгибающему моменту M_1 , т. е. в сечение 1-1 ввести условный шарнир (рисунок 1.19);

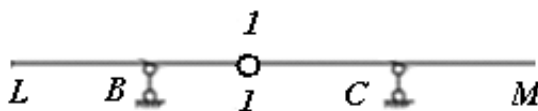


Рисунок 1.19

- взамен удалённой связи, приложить изгибающий момент M_1 к левой и правой частям в положительном направлении (слева и справа – чтоб момент растягивал нижние волокна, рисунок 1.20);

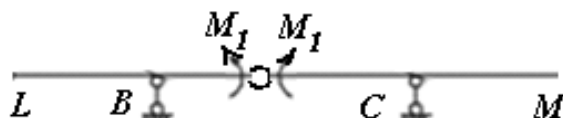


Рисунок 1.20

- сообщить возможные перемещения элементам балки в направлении приложенных моментов, при этом балка в шарнире не разрывается, а части диска

LM повернутся относительно врезанного шарнира вокруг опор В и С (рисунок 1.21);

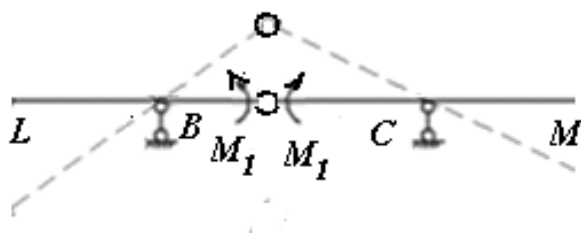
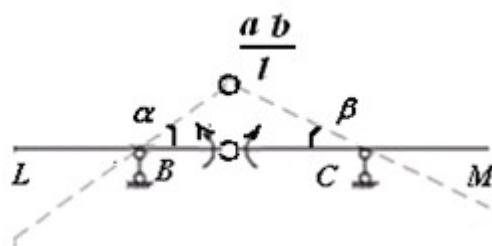


Рисунок 1.21

- на графике перемещений суммарный угол поворота оси балки в сечении 1-1 должен быть равен единице, при этом перемещение в сечении 1-1 будет определяться из геометрических соображений по формуле (рисунок 1.22);

Рисунок 1.22



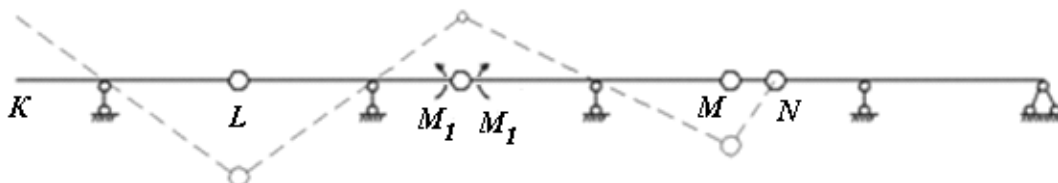
$$\alpha + \beta = 1$$

$$\frac{a \cdot b}{l} = \frac{2 \cdot 3}{5} = 1,2$$

Полученная ломаная линия образует линию влияния M_1 на участке.

Далее показываем влияние балки LM на участки справа и слева. Так как в точке L шарнир переместился вниз, то он потянет за собой участок KL, и в точке M шарнир опустился вниз, то и он потянет за собой участок MN. Далее справа шарнир N не перемещается, следовательно, и оставшая часть балки справа тоже не будет перемещаться (рисунок 1.23).

Рисунок 1.23



Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_1 (рисунок 1.24б).

Остальные ординаты линии влияния могут быть найдены из отношений подобия соответствующих треугольников.

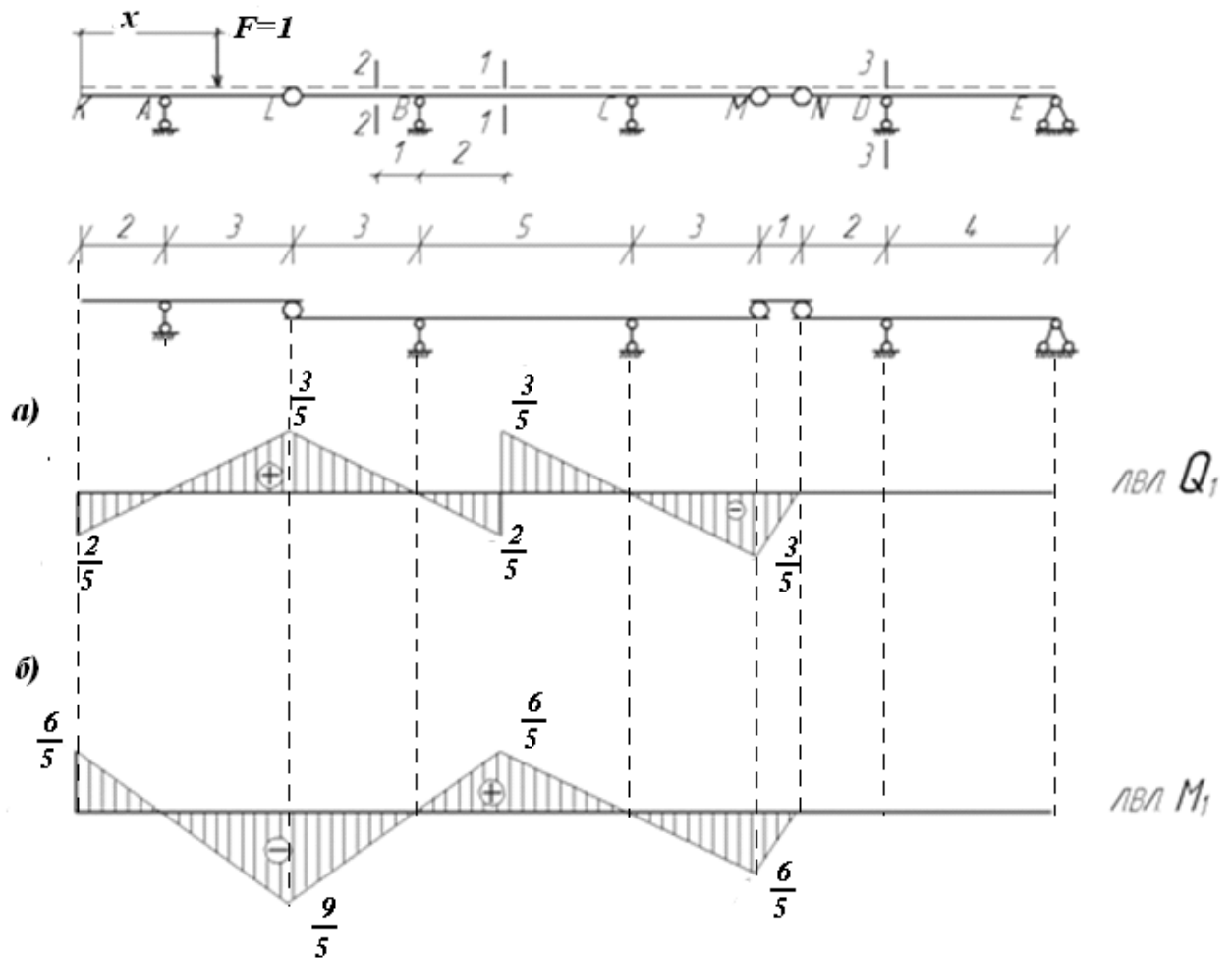


Рисунок 1.24

б) построение линии влияния M_2

Построение линии влияния M_2 проводится аналогично построению линии M_1 . Так как сечение 2-2 находится на консольной части элемента балки LM, то под воздействием приложенных моментов M_2 перемещаться будет только левая часть балки (рисунок 1.25в). Шарнир L опустится на величину численно равную длине повернутой части балки от сечения 2-2 до шарнира L (суммарный угол поворота оси балки должен составлять единицу, но так как поворачивается только одна часть балки, то угол поворота этой части будет равен 1). Далее показываем влияние балки LM на участки справа и слева (рисунок 1.25 в).

Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_2 (рисунок 1.25 г).

в) построение линии влияния M_3

Для построения линии влияния M_3 необходимо ввести шарнир в опорное сечение D балки и приложить моменты M_3 в положительном направлении (рисунок 1.25 и). Консоль DN повернется вокруг опоры D, а правая часть DE будет закреплена на двух опорах D и E, поэтому перемещаться не будет. Суммарный угол поворота оси балки должен составлять единицу, но так как поворачивается только одна часть балки - DN, то ордината отклонения точки N будет равна длине консоли DN, т.е. 2 метрам. Далее показываем влияние балки DE на участки балки слева (рисунок 1.25 к).

Полученное очертание и есть линия влияния изгибающего момента M_3 (рисунок 1.25 и).

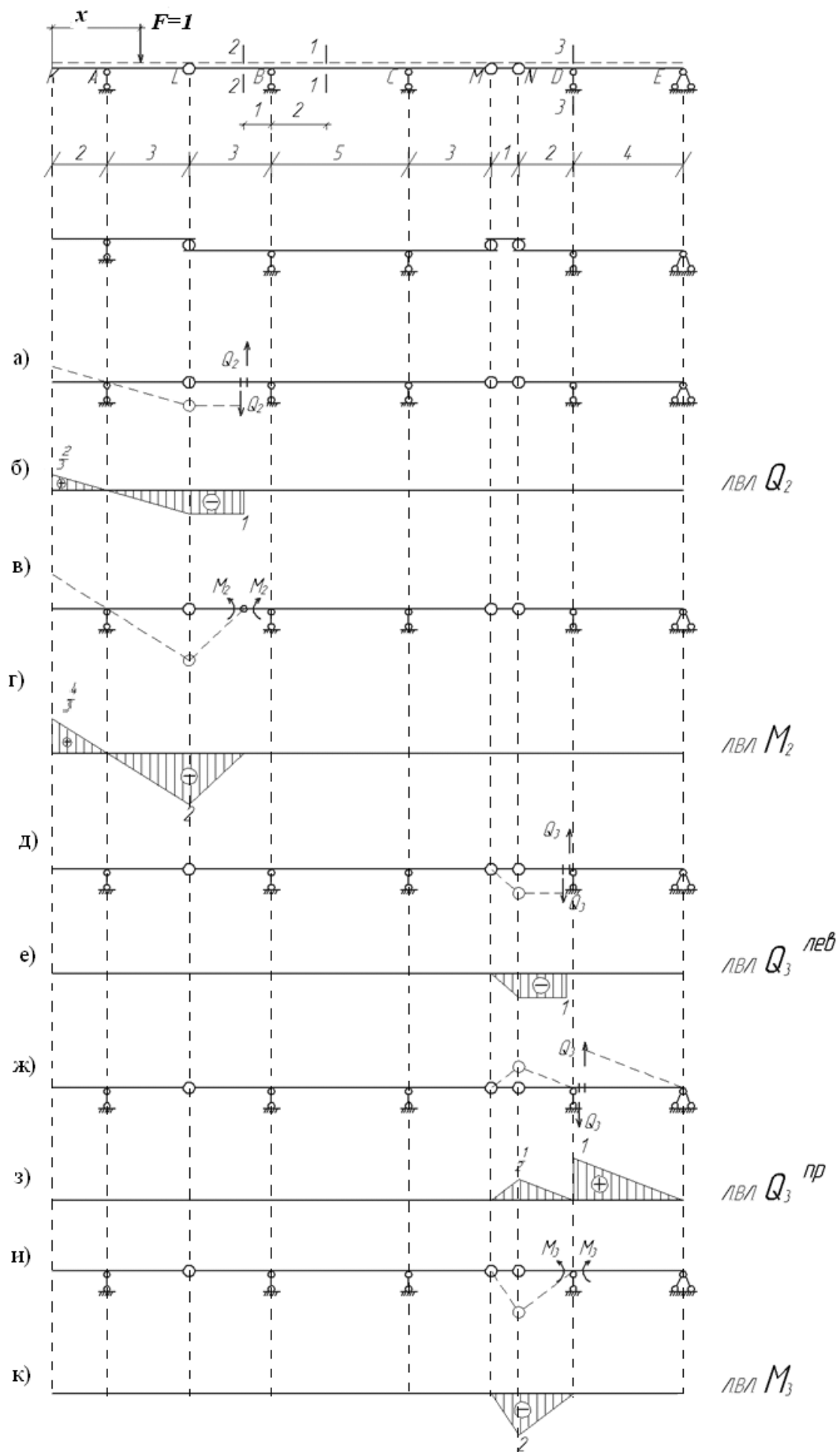


Рисунок 1.25

7. Вычисление значений опорных реакций, поперечных силы и изгибающих моментов по линиям влияния от неподвижной нагрузки производится по формулами 1.1–1.3.

В соответствии с формулой 1.1, учитывая правило знаков, определяем значения опорных реакций по линиям влияния (рисунок 1.26).

$$V = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{\square} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{\square} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{\square} \quad (1.1)$$

$$M = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{\square} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{\square} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{\square} \quad (1.2)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{\square} + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_{\square} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{\square} \quad (1.3)$$

$$V_A = q \cdot \omega + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot 0,5 \cdot 1,333 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$$

$$V_B = q \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (-0,5 \cdot 0,533 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,6 \cdot 11 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 4) + 6 \cdot (-0,5)$$

$$V_C = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) + F_2 \cdot y + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot$$

$$V_D = q \cdot \omega + F_1 \cdot y + F_2 \cdot 0 - M \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 1 + 10 \cdot 1,375 - 2 \cdot 0,25 = 15,5 \text{ кН}$$

$$V_E = q \cdot (-\omega) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot (-0,5 \cdot 0,5 \cdot 1) + 10 \cdot (-0,375) + 2 \cdot 0,25 = -4 \text{ кН}$$

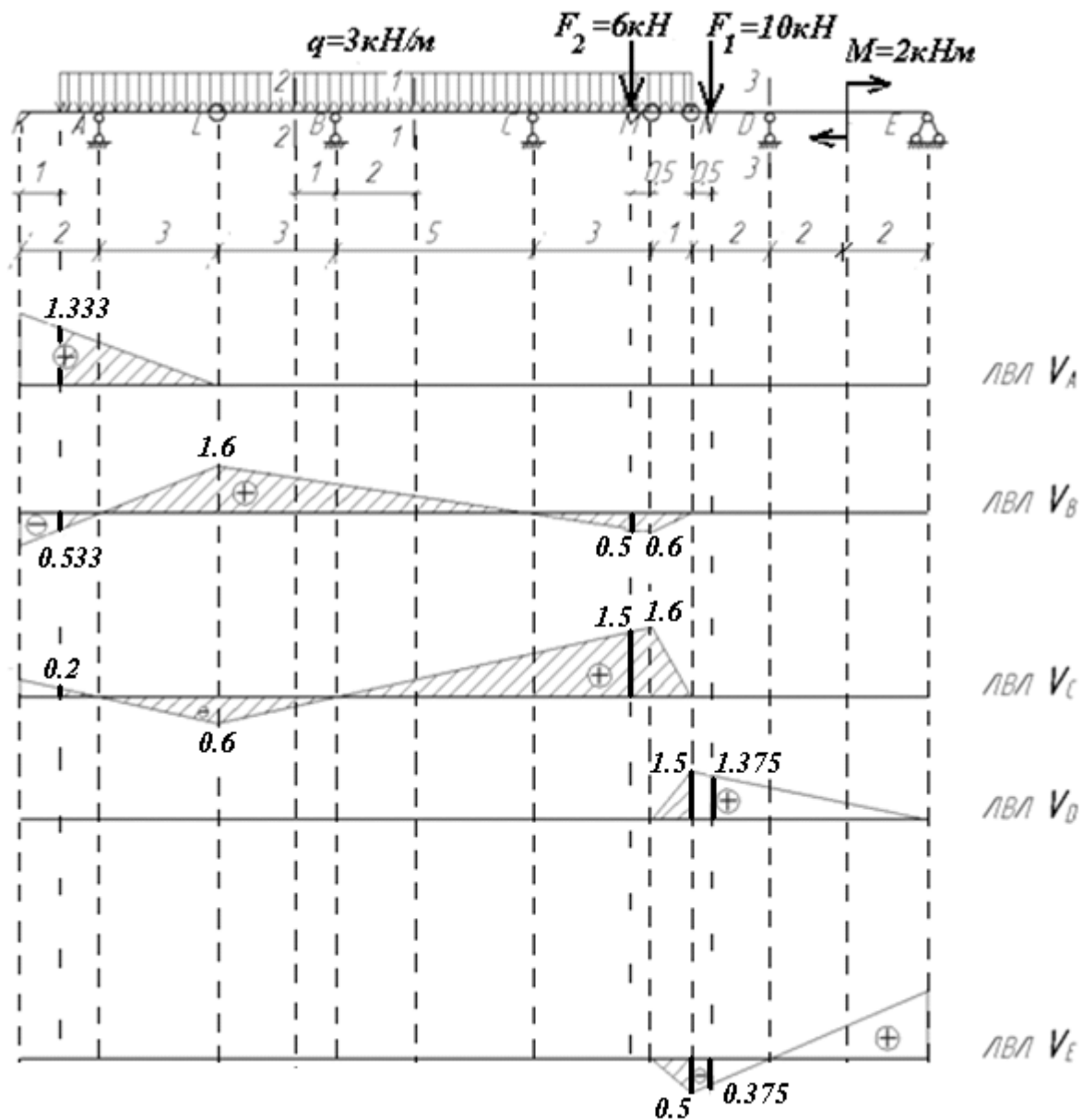


Рисунок 1.26

Согласно формулам 1.2–1.3, учитывая правило знаков, определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов в заданных сечениях по линиям влияния (рисунок 1.27).

$$Q_1 = q \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3(-0,5 \cdot 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 6 - 0,5 \cdot 0,4 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 6 - 0,5 \cdot 0,2 \cdot 1) = 10 \text{ kN}$$

$$Q_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + F_2 \cdot 0 + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (0,5 \cdot 0,333 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -10 \text{ kN}$$

$$Q_3^{леб} = q \cdot (-\omega_1) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (-0,5 \cdot 1 \cdot 1) + 10 \cdot (-1) = -11,5 \text{ kN}$$

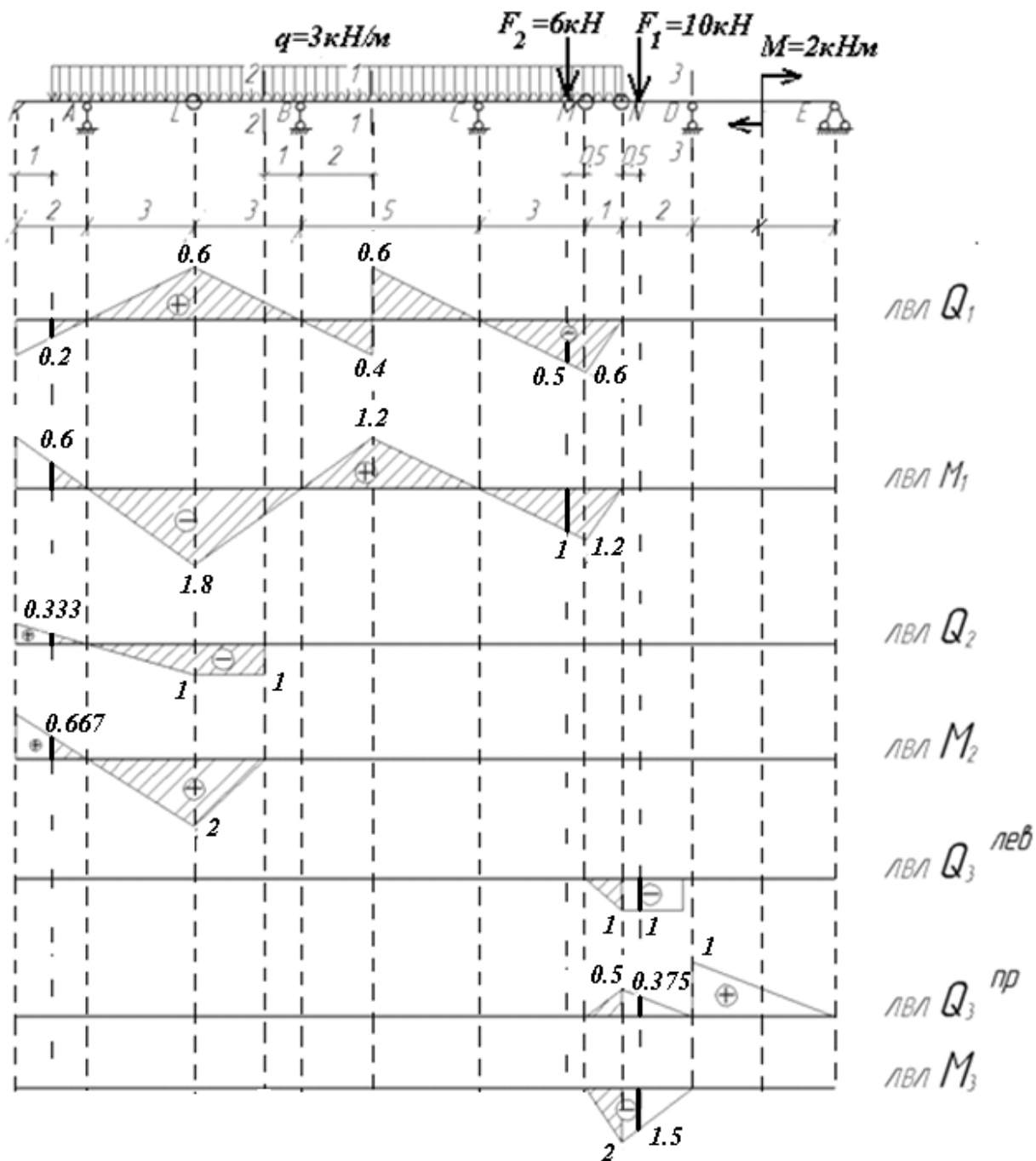
$$Q_3^{np} = q \cdot \omega_1 + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot y + M \cdot \text{tg } \alpha = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 + 10 \cdot 0,375 + 10 \cdot 1 - 2 \cdot 0,25 = 4 \text{ kN}$$

$$M_1 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + F_2 \cdot (-y) + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (0,5 \cdot 0,6 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1,8 \cdot 6 + 0,5 \cdot 1,2 \cdot 5 - 0,5 \cdot 1,2 \cdot 5) = 14 \text{ kNm}$$

$$M_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2) + F_2 \cdot 0 + F_1 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (0,5 \cdot 0,667 \cdot 1 - 0,5 \cdot 2 \cdot 5) = -14 \text{ kNm}$$

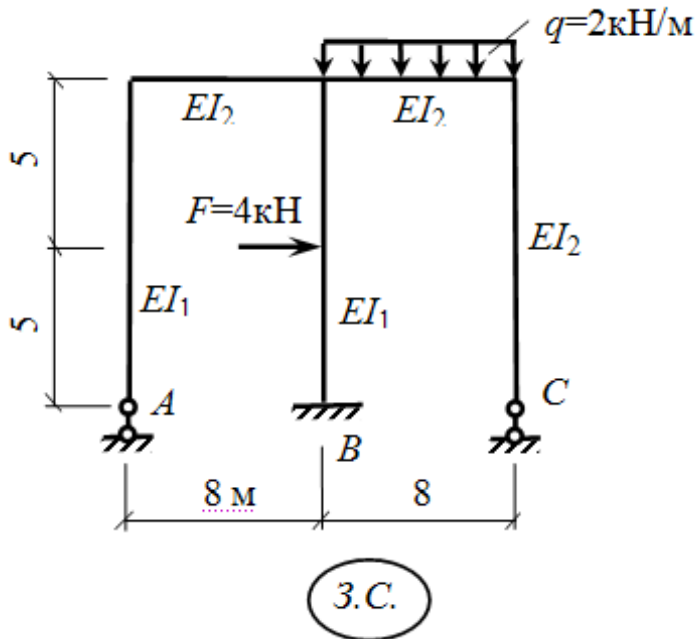
$$M_3 = q \cdot (-\omega_1) + F_1 \cdot (-y) + F_2 \cdot 0 + M \cdot 0 = 3 \cdot (-0,5 \cdot 2 \cdot 1) + 10 \cdot (-1,5) = -18 \text{ кН}$$

Вывод: Сравнивая результаты, полученные при расчете аналитическим способом и при определении усилий по линиям влияния, видно, что результаты совпадают с допустимой относительной погрешностью 3%.



Задача 2. Расчет статически неопределимой рамы методом сил

Заданная система. Жесткость у стержней рамы разная. Примем $I_1 = I$, тогда $I_2 = 2I$.



1. Определим степень статической неопределимости заданной системы по формуле:

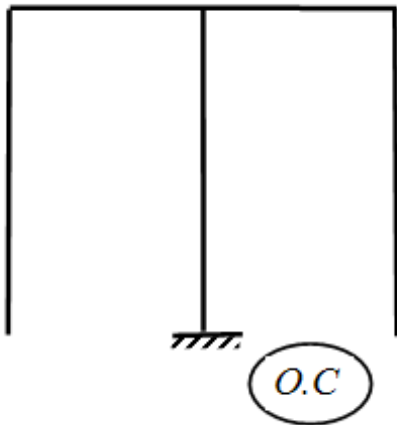
$$n = \sum R - III - 3 = 5 - 0 - 3 = 2.$$

Система 2 раза статически неопределима, и для её решения потребуется два дополнительных уравнения.

Это канонические уравнения метода сил:

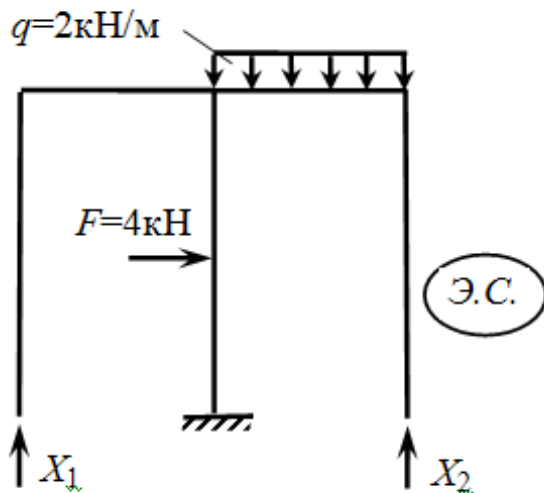
$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

2. Освободим заданную систему от «лишних» связей и получим основную систему. За «лишние» связи в данной задаче примем опору А и опору С.



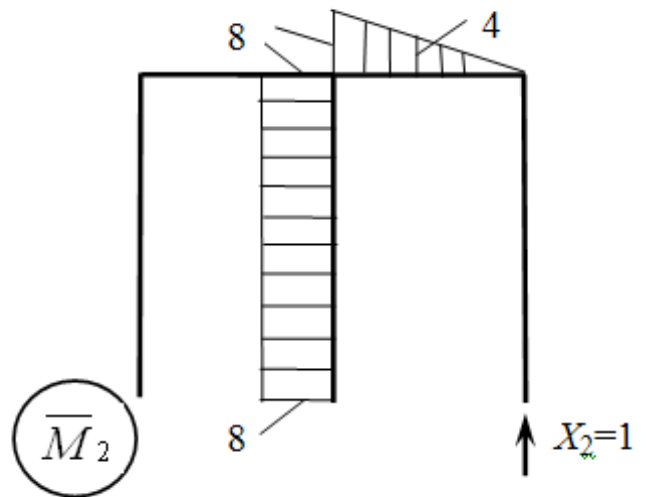
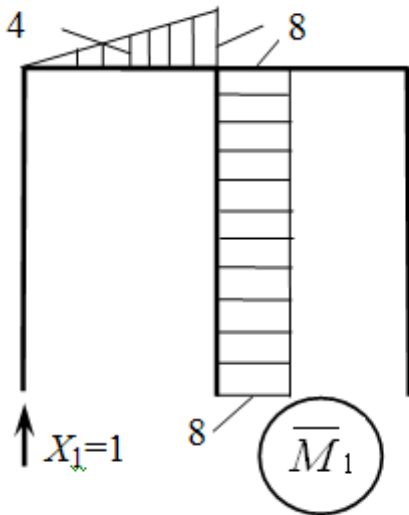
Теперь основную систему следует преобразовать в систему, эквивалентную (равнозначную) заданной.

Для этого загрузим основную систему заданной нагрузкой, действия «лишних» связей заменим их неизвестными реакциями X_1 и X_2 и вместе с системой канонических уравнений (1) данная система будет эквивалентна заданной.

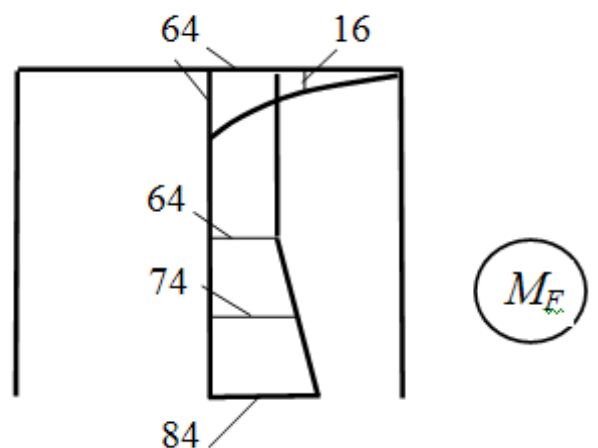
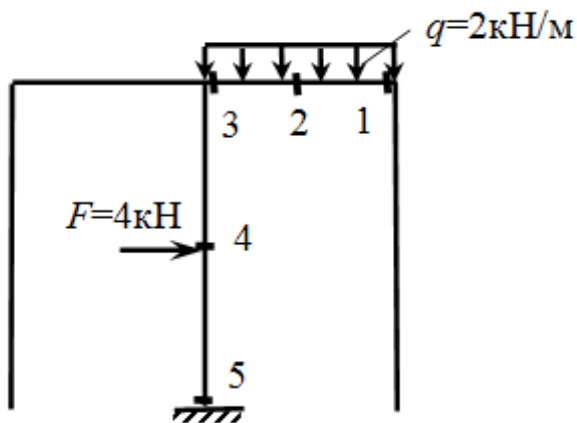


3. По направлению предполагаемой реакции отброшенных опор к основной системе поочередно прикладываем единичные силы $X_1=1$ и $X_2=1$ и строим

эпюры \overline{M}_1 и \overline{M}_2 .



Теперь основную систему загрузим заданной нагрузкой и построим грузовую эпюру M_F .



$$M_1=0$$

$$M_2= -q \cdot 4 \cdot 2 = -16 \text{ кНм (сжатые волокна внизу)}$$

$$M_3= -q \cdot 8 \cdot 4 = -64 \text{ кНм (сжатые волокна внизу)}$$

$$M_4= -q \cdot 8 \cdot 4 = -64 \text{ кНм (сжатые волокна справа)}$$

$$M_5= -q \cdot 8 \cdot 4 - F \cdot 5 = -84 \text{ кНм (сжатые волокна справа)}$$

4. Определяем коэффициенты и свободные члены канонического уравнения по формуле Симпсона перемножением эпюр (обращаем внимание на разные жесткости участков).

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{8}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8) + \frac{10}{6EI} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8) \\ = \frac{725,33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \frac{725,33}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = -\frac{10}{6EI} (8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 8 \cdot 8) = -\frac{640}{EI}.$$

$$\Delta_{1F} = \bar{M}_1 \cdot M_F = \frac{5}{6EI} (8 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 64 + 8 \cdot 64) + \frac{5}{6EI} (8 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 74 + 8 \cdot 74) \\ = \frac{5520}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \bar{M}_2 \cdot M_F = -\frac{8}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 16 + 8 \cdot 64) - \frac{5}{6EI} (8 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 64 + 8 \cdot 64) \\ - \frac{5}{6EI} (64 \cdot 8 + 4 \cdot 74 \cdot 8 + 84 \cdot 8) = -\frac{6032}{EI}.$$

Подставляем в каноническое уравнение, сокращаем на EI.

$$\begin{cases} 725,33X_1 - 640X_2 + 5520 = 0 \\ -640X_1 + 725,33X_2 - 6032 = 0 \end{cases}$$

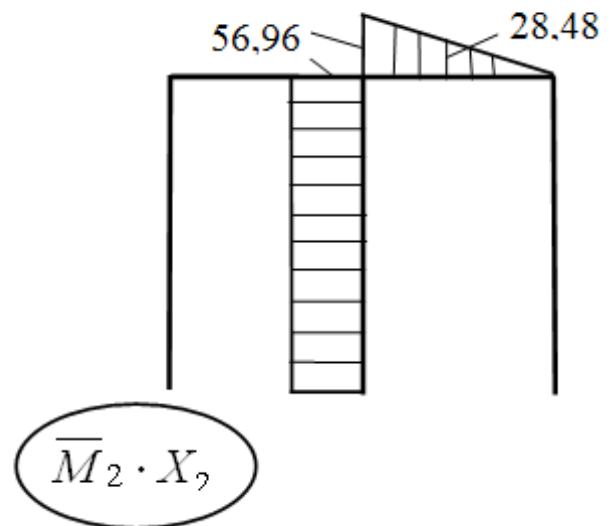
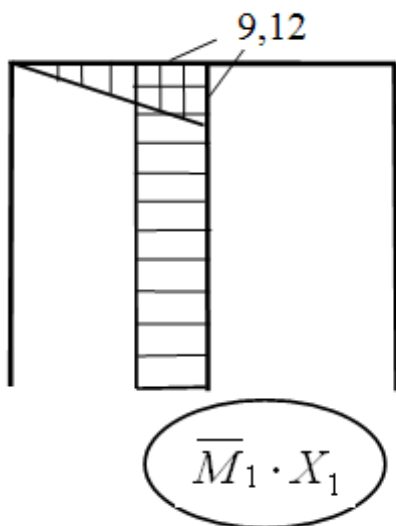
Поделим первое и второе уравнения на сомножители при X1, а затем из одного уравнения вычтем второе. Найдем неизвестные.

X2=7,12кН, тогда X1=-1,14 кН.

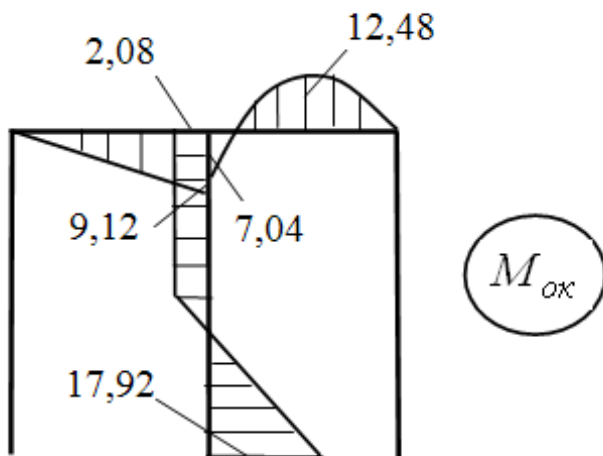
5.Строим окончательную эпюру моментов по формуле:

$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F$$

Сначала строим эпюры $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$:

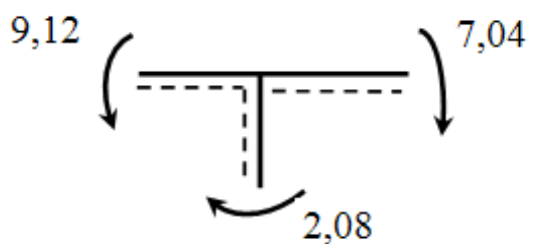


Тогда эпюра $M_{ок}$



Проверки окончательной эпюры моментов ($M_{ок}$).

1. Статическая проверка – методом вырезания жестких узлов рамы – они должны находиться в равновесии.



Узел находится в равновесии.

2. Деформационная проверка.

$$M_{ок} \cdot M_s = 0$$

где M_s – суммарная эпюра единичных моментов, для её

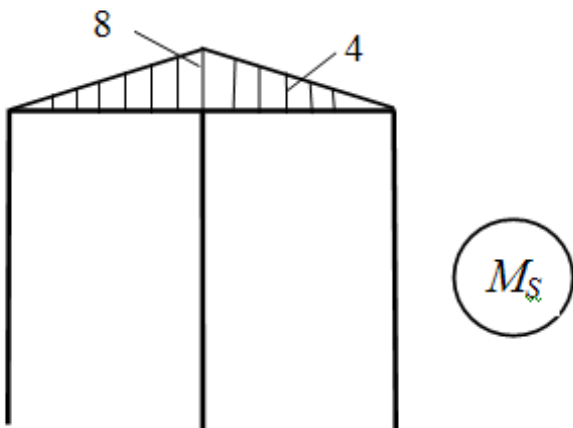
построения одновременно к основной системе прикладываем $X_1=1$ и $X_2=1$.

Физический смысл деформационной проверки – перемещения по направлению

всех отброшенных связей от действия неизвестных реакций и всей внешней

нагрузки должны быть равны 0.

Строим эпюру M_s .



Выполняем деформационную проверку по ступеням:

$$1. M_S \cdot M_S = \sum \delta_{ik}$$

$$M_S \cdot M_S = \frac{8}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8) \cdot 2 = \frac{170,66}{EI}$$

$$\sum \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{725,33}{EI} + \frac{725,33}{EI} - \frac{640}{EI} - \frac{640}{EI} = \frac{170,66}{EI}$$

верно

$$2. M_S \cdot M_F = \sum \Delta_{ik}$$

$$M_S \cdot M_F = -\frac{8}{6E2I} (8 \cdot 64 + 4 \cdot 16 \cdot 4 + 0 \cdot 0) = -\frac{512}{EI}$$

$$\sum \Delta_{ik} = \frac{5520}{EI} - \frac{6032}{EI} = -\frac{512}{EI} \text{ - верно}$$

3. Собственно деформационная проверка

$$M_{ок} \cdot M_s = -\frac{8}{6E2I} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4,56 \cdot 4 + 9,12 \cdot 8) +$$

$$+ \frac{8}{6E2I} (-7,04 \cdot 8 + 4 \cdot 12,48 \cdot 4 + 0 \cdot 0) = -\frac{97,28}{EI} + \frac{95,57}{EI} \approx 0$$

ошибка 1,74% < 5%, что допустимо.

6. Построение Эп Q по Эп Мок.

Эп Q строим по формуле:

$$Q = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{\ell} - qz \Big|_0^\ell$$

Если на участке нет равномерно-распределенной нагрузки, то применяем формулу:

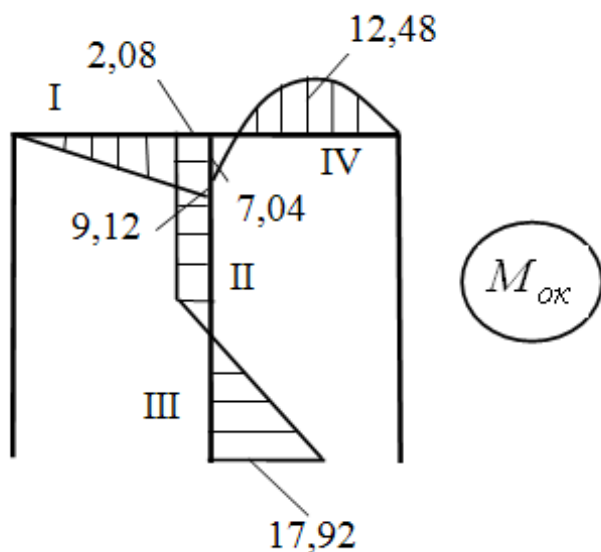
$$Q = \frac{M_{пр} - M_{лев}}{\ell}$$

где Мпр – момент правый,

Млев – момент левый,

ℓ — длина участка.

Разобьем Эп Мок на участки:



I участок.

$$M_{np} = -9,12, \quad M_{лев} = 0$$

$$Q = \frac{-9,12 - 0}{8} = -1,14 \text{ кН}$$

II участок.

$$M_{np} = 2,08, \quad M_{лев} = 2,08$$

$$Q = 0$$

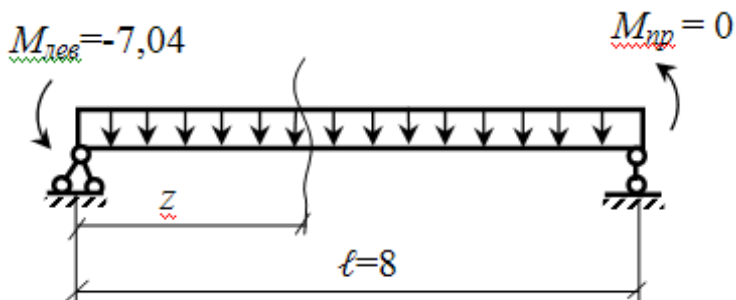
III участок.

$$M_{np} = 2,08, \quad M_{лев} = -17,92$$

$$Q = \frac{2,08 - (-17,92)}{5} = 4 \text{ кН}$$

IV участок (с равномерно-распределенной нагрузкой).

Зарисуем IV участок отдельно как балку и нанесем моменты.

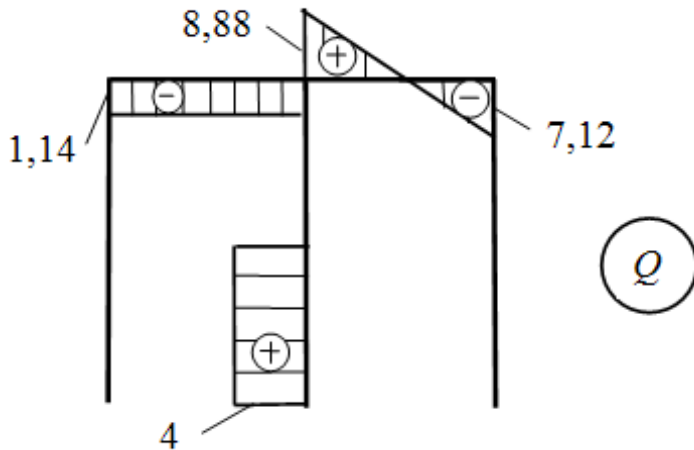


z меняется от 0 до ℓ

$$z=0 \quad Q = \frac{ql}{2} + \frac{M_{np} - M_{лес}}{\ell} - qz = \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{0 - (-7.04)}{8} - 0 = 8.88 \text{ кН}$$

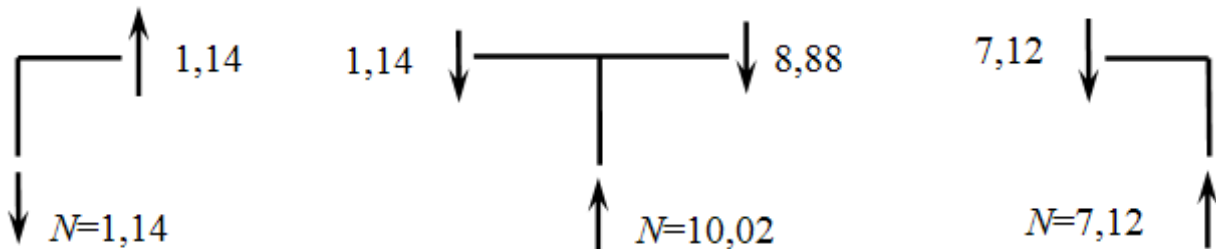
$$z=\ell \quad Q = \frac{ql}{2} + \frac{M_{np} - M_{лес}}{\ell} - ql = \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{0 - (-7.04)}{8} - 2 \cdot 8 = -7.12 \text{ кН}$$

Строим ЭпQ:

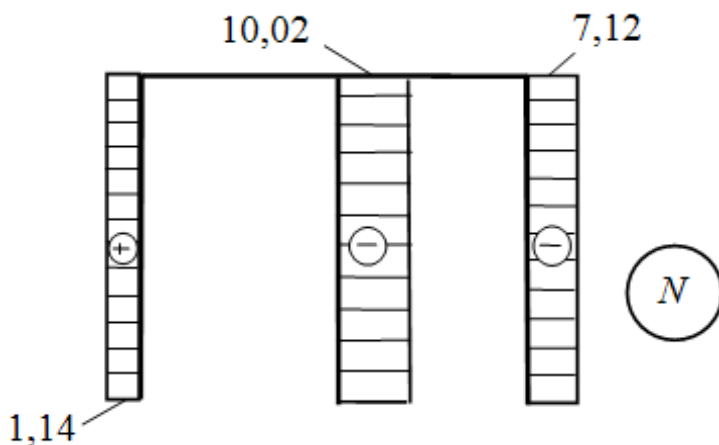


7. Построение Эп N по Эп Q.

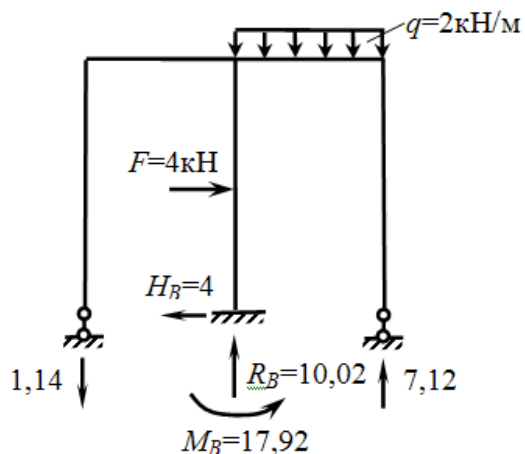
Вырезаем узлы рамы, показываем поперечные силы с эюры Q и уравниваем узлы продольными силами.



Строим Эп N.



8. Общая статическая проверка рамы. На заданной схеме рамы показываем значения опорных реакций с построенных эпюр и проверяем по уравнениям статики.



$$\begin{aligned} \sum \underline{x} &= 0 \\ F - 4 &= 0 - \text{верно} \\ \sum \underline{y} &= 0 \\ -1,14 - q \cdot 8 + 10,02 + 7,12 &= 0 \\ 17,2 - 17,2 &= 0 - \text{верно.} \\ \sum M_B &= 0 \\ -1,14 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 4 - 17,92 - 7,12 \cdot 8 &= 0 \\ 84 - 84 &= 0 - \text{верно} \end{aligned}$$

Все проверки сошлись. Задача решена.

Задача 3. 3. Расчет статически определимой рамы без замкнутого контура.

1 Расчет статически определимой рамы

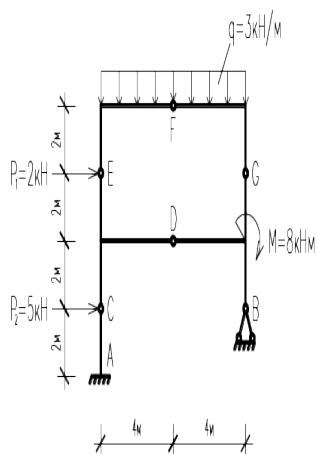


Рисунок 1. Расчётная схема рамы

1.1 Кинематический анализ

Определяем степень свободы системы по формуле:

$$W=3D- 2Ш- C_0, \text{ где}$$

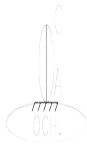
Д – число дисков

Ш – количество простых шарниров

C_0 – число опорных стержней

$$W= 3 \cdot 5- 2 \cdot 5- 5= 0$$

1.2 Структурный анализ



$$\Gamma HC1= AC+ OCH$$

Два диска соединяются тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке стержнями.

$$\Gamma HC2= \Gamma HC1+ CDE+ BDG$$

Три диска соединяются тремя шарнирами не лежащими на одной прямой.

$$\Gamma HC3= \Gamma HC2+ EF+ FG$$

Три диска соединяются тремя шарнирами не лежащими на одной прямой.

Рисунок 4. Структурный анализ рамы

Система в целом является геометрически неизменяемой.

1.3 Построение эпюр внутренних усилий

1) Строим эпюры внутренних усилий для каждой части рамы

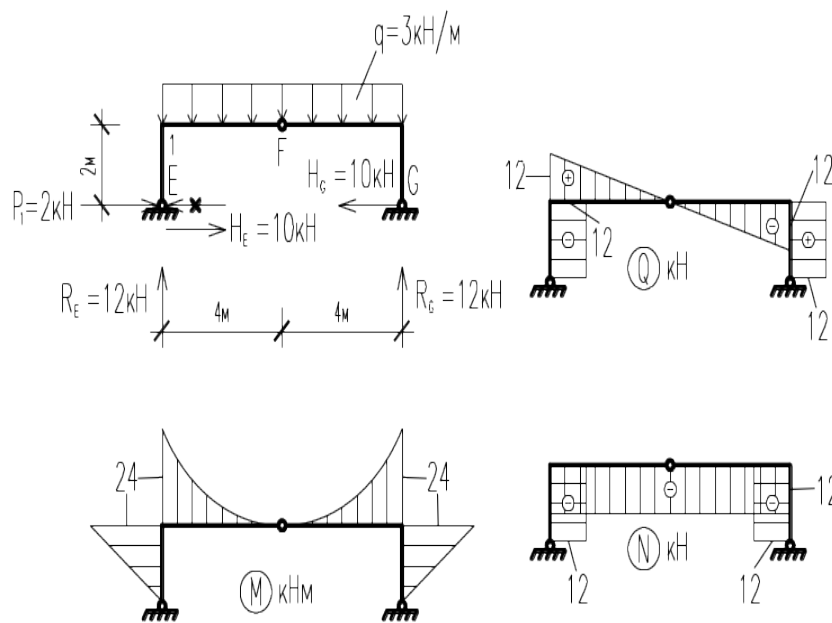


Рисунок 2. -Рама EFG

$$\sum M_E = 0$$

$$-q \cdot 8 \cdot 4 + R_G \cdot 8 = 0$$

$$R_G = \frac{3 \cdot 8 \cdot 4}{8} = 12 \text{ кН}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \mathbf{0}$$

$$q \cdot 8 \cdot 4 - R_E \cdot 8 = 0$$

$$R_E = \frac{3 \cdot 8 \cdot 4}{8} = 12 \text{ кН}$$

$$\sum y = \mathbf{0}$$

$$q \cdot 8 - R_E - R_G = 0$$

$$3 \cdot 8 - 12 - R_G = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_F^{\text{лсв}} = \mathbf{0}$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 + P_1 \cdot 2 - H_E \cdot 2 - R_E \cdot 4 = 0$$

$$H_E = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 12 \cdot 4}{2} = -10 \text{ кН}$$

$$\sum \mathbf{M}_F^{\text{сп}} = \mathbf{0}$$

$$-q \cdot 4 \cdot 2 - H_G \cdot 2 + R_G \cdot 4 = 0$$

$$H_G = \frac{-3 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 4}{2} = 12 \text{ кН}$$

$$\sum \mathbf{M}_1^{\text{лсв}} = - (P_1 + H_E) \cdot 2 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum \mathbf{M}_F^{\text{лсв}} = - (P_1 + H_E) \cdot 2 + R_E \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = -12 \cdot 2 + 12 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

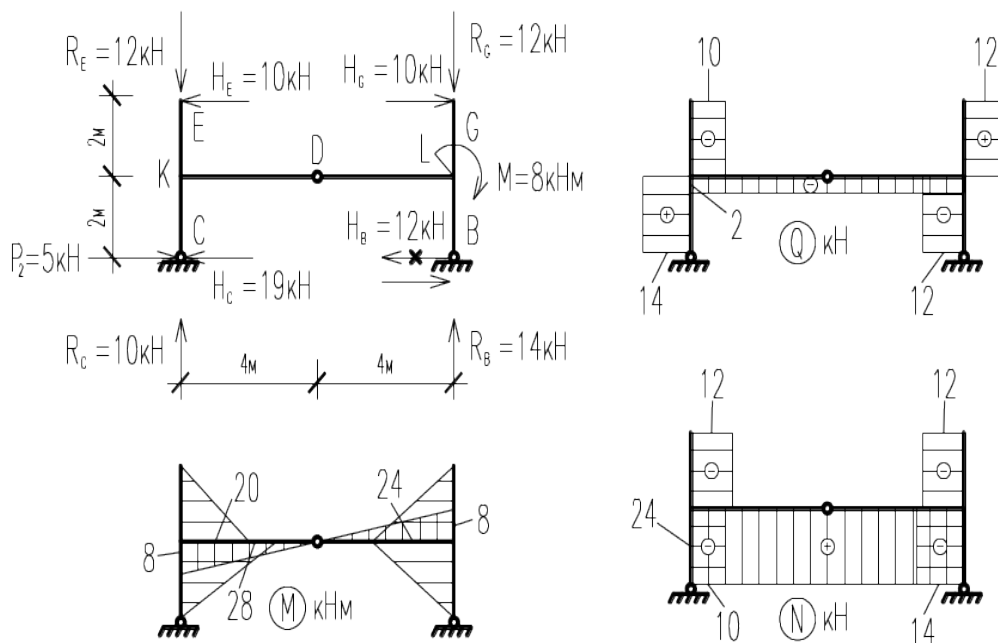


Рисунок 3. Рама CEDGB

$$\sum M_C = 0$$

$$-R_G \cdot 8 + R_B \cdot 8 - M - H_G \cdot 4 + H_E \cdot 4 = 0$$

$$R_B = \frac{12 \cdot 8 + 8 + 12 \cdot 4 - 10 \cdot 4}{8} = 14 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-M - H_G \cdot 4 + R_E \cdot 8 + H_E \cdot 4 - R_C \cdot 8 = 0$$

$$R_C = \frac{-8 - 12 \cdot 4 + 12 \cdot 8 + 10 \cdot 4}{8} = 10 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0$$

$$R_E + R_G - R_C - R_B = 0$$

$$12 + 12 - 10 - 14 = 0$$

$$\sum M_D^{\text{лев}} = 0$$

$$R_E \cdot 4 + H_E \cdot 2 + P_2 \cdot 2 - H_C \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0$$

$$H_C = \frac{12 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 8 + 14 \cdot 4}{2} = 19 \text{ кН}$$

$$\sum M_D^{np} = 0$$

$$-R_G \cdot 4 - H_G \cdot 2 - M - H_B \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0$$

$$H_B = \frac{-12 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 8 + 14 \cdot 4}{2} = -12 \text{ кН}$$

$$\sum M_L^{вспх} = -H_G \cdot 2 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum M_L^{нижн} = -H_B \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum M_L^{лев} = -R_E \cdot 8 + R_C \cdot 8 - P_2 \cdot 2 + H_C \cdot 2 - H_E \cdot 2 = -12 \cdot 8 + 10 \cdot 8 - 5 \cdot 2 + 19 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_K^{вспх} = H_E \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_K^{нижн} = -P_2 \cdot 2 + H_C \cdot 2 = -10 + 38 = 28 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_K^{np} = -R_G \cdot 8 + R_B \cdot 8 - H_G \cdot 2 - M + H_B \cdot 2 = -12 \cdot 8 + 14 \cdot 8 - 12 \cdot 2 - 8 + 12 \cdot 2 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum y = 0$$

$$R_C - R_A = 0$$

$$R_C = R_A = 10 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0$$

$$H_C = H_A = 19 \text{ кН}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$H_A \cdot 2 - M = 0$$

$$M = H_A \cdot 2 = 19 \cdot 2 = 38 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2) Строим эпюры внутренних усилий для рамы в целом

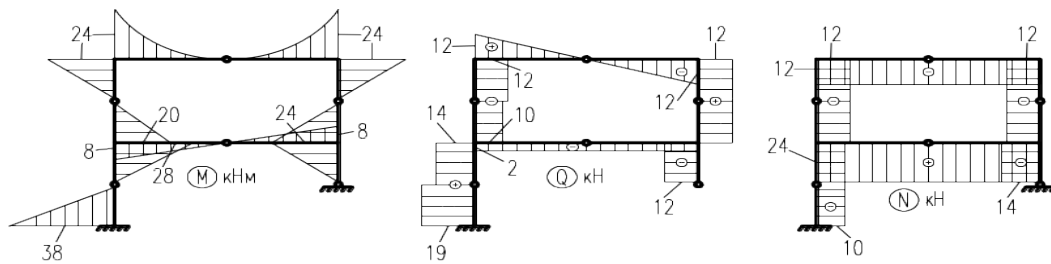


Рисунок 4. Эпюры внутренних усилий

1.4 Статическая проверка расчёта

1) Проверка равновесия узлов рамы

Узел К:

$$\sum x = 10 + 14 - 24 = 0$$

$$\sum y = 12 - 2 - 10 = 0$$

Узел L:

$$\sum x = 12 + 12 - 24 = 0$$

$$\sum y = 12 + 2 - 14 = 0$$

$$\sum M_K = 20 + 8 - 28 = 0$$

$$\sum M_L = 8 + 24 - 8 - 24 = 0$$

2) Проверка равновесия рамы в целом

$$\sum y = 0$$

$$q \cdot 8 - R_A - R_B = 0$$

$$3 \cdot 8 - 10 - 14 = 0$$

$$\sum \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$P_1 + P_2 + H_B - H_A = 0$$

$$2 + 5 + 12 - 19 = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$$

$$M_A - P_2 \cdot 2 - P_1 \cdot 6 - q \cdot 8 \cdot 4 - M - H_B \cdot 2 + R_B \cdot 8 = 38 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 8 \cdot 4 - 8 - 12 \cdot 2 + 14 \cdot 8 = 150 - 150 = 0$$